

## МЕХАΝІКА

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКИ С ПУСТОТЕЛЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ  
ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ОСЕВОМ СЖАТИИ

З.Ф.ИСАЕВ

ИММ НАН Азербайджана

*Данная статья посвящена исследованию устойчивости цилиндрических оболочек, усиленных перекрестной системой ребер с заполнителем и имеющих центральный канал при продольном осевом сжатии. Задача решена энергетическим способом, основанным на использовании одночленной аппроксимации перемещений. Проведен анализ влияния параметров внешней среды на параметр критических напряжений.*

В современной технике в качестве несущих элементов конструкций широко применяются подкрепленные цилиндрические оболочки. В рабочих условиях они находятся в контакте с различными средами. К расчетной модели подкрепленных цилиндрических оболочек, заполненной средой, приводятся, например, различные емкости и трубопроводы, конструкции специального назначения и т.д. Поэтому разработка теории и методов расчета на устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек с учетом внешних воздействий является актуальной задачей, имеющей большое практическое значение.

Задача решена энергетическим способом, основанным на использовании одночленной аппроксимации перемещений.

Формула потенциальной энергии оболочки, нагруженной осевыми сжимающими силами, имеет вид[1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\theta + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)R^2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E_h}{2R} \sum_{j=1}^{k_1} \int_0^{2\pi} \left[ F_h \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \frac{h_h}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{I_{xh}}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 + \frac{G_h}{R^2 E_h} I_{kp,h} \times \right. \\
& \times \left. \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]_{\xi=\xi_j} d\theta + \frac{E_c}{2R} \sum_{i=1}^k \int_0^{\xi_1} \left[ F_c \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{h_c}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{I_{yc}}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{E_c}{2R} \sum_{i=1}^k \int_0^{\xi_1} \left[ F_c \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{h_c}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{I_{yc}}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{G_c}{E_c} I_{kp,c} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right]_{\theta=\theta_i} d\xi - \\
& - \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\theta - \frac{\sigma_x F_c}{2R} \sum_{i=1}^k \int_0^{\xi_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \Big|_{\theta=\theta_i} d\xi, \quad (1)
\end{aligned}$$

здесь  $\xi = \frac{x}{r}$ ,  $\theta = \frac{y}{r}$ ;  $E_c, G_c, E_h, G_h$  - модуль упругости и сдвига материала про-

дольных и поперечных ребер, соответственно;  $k, k_1$  - количество продольных и поперечных ребер, соответственно;  $\sigma_x$  - осевые сжимающие напряжения;  $u, v, w$  - компоненты вектора перемещения оболочки;  $h$  и  $r$  - толщина и радиус оболочки соответственно;  $E, \nu$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки;  $F_c, I_{yc}, I_{kp,c}, F_h, I_{xh}, I_{kp,h}$  - соответственно, площади и моменты инерции поперечного сечения продольного и поперечного стержня относительно оси  $OX$  и  $OZ$ , а также момент инерции при кручении.

Влияние среды на оболочку определяется как влияние внешних поверхностных нагрузок, приложенных к оболочке и вычисляется как работа, совершенная этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^{\xi_2} \int_0^{2\pi} (q_x u + q_\theta v + q_r w) d\xi d\theta, \quad (2)$$

где  $q_x, q_\theta, q_r$  - компоненты контактного давления со стороны заполнителя на оболочку.

Полная энергия системы такова:

$$\Pi = \mathcal{E} + A_0$$

Уравнения равновесия среды в векторной форме имеет вид [5]:

$$a_e^2 q \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} - a_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $a_t = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ,  $a_e = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  - скорости распространения продольных и попе-

речных волн в среде, соответственно;  $\vec{s}(s_x, s_\theta, s_r)$  - вектор перемещения,  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ламе. К системам уравнений равновесия среды (3) прибавляются контактные условия. Предполагается, что контакт между оболочкой и средой жесткий, т.е. при  $r = R$

$$u = s_x, v = s_\theta, w = s_r, \quad (4)$$

$$q_x = \sigma_{rx}, q_\theta = \sigma_{r\theta}, q_r = -\sigma_{rr}, \quad (5)$$

и канал заполнителя свободен от напряжений, т.е. при  $r = a$  ( $a$  - радиус канала заполнителя)

$$\sigma_{rx} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rr} = 0. \quad (6)$$

Компоненты  $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rr}$  тензора напряжений определяются следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \mu_s \left( \frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right); \sigma_{r\theta} = \mu_s \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right] \\ \sigma_{rr} &= \lambda_s \left( \frac{\partial s_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rs_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu_s \frac{\partial s_r}{r}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\lambda_s, \mu_s$  - коэффициенты Ламе для среды.

Дополняя контактными условиями (4), (5) уравнения равновесия среды (3) приходим к контактной задаче об устойчивости подкрепленной оболочки, заполненной средой. Другими словами, задача об устойчивости подкрепленной оболочки со средой сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, среды при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Далее будут рассматриваться оболочки, края которых шарнирно оперты. Компоненты вектора перемещения таких оболочек ищем в виде

$$u = A \cos \chi \xi \cos n\theta, v = B \sin \chi \xi \sin n\theta, w = C \sin \chi \xi \cos n\theta, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Здесь  $A, B, C$  - неизвестные постоянные.

Решения системы (3) имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} s_x &= \left[ \left( -kr \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1-\nu_s) k I_n(kr) \right) A_s + k I_n(kr) B_s + \left( -kr \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4(1-\nu_s) k K_n(kr) \right) \tilde{A}_s + k K_n(kr) \tilde{B}_s \right] \cos n\varphi \cos kx \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_\varphi &= \left[ -\frac{n}{r} I_n(kr) B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} C_s - \frac{n}{r} K_n(kr) \tilde{B}_s - \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} \tilde{C}_s \right] \sin n\varphi \sin kx \sin \omega t \\
s_r &= \left[ -k^2 r I_n(kr) A_s + \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} B_s + \frac{n}{r} I_n(kr) C_s - k^2 r K_n(kr) \tilde{A}_s + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} \tilde{B}_s + \frac{n}{r} K_n(kr) \tilde{C}_s \right] \cos n\varphi \sin kx \sin \omega t, \tag{9}
\end{aligned}$$

здесь  $I_n, K_n$  -модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка первого и второго рода, соответственно.

Используя контактные условия (4), перемещения оболочек (8), решения уравнения равновесия среды (9) постоянные  $A_s, B_s, C_s, \tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s$  выразим через  $A, B, C$ . Выполнения контактных условий (4)-(6) дает нам следующую систему алгебраических уравнений относительно  $A_s, B_s, C_s$ :

$$\begin{aligned}
&\left( -k^2 r I_n'(kR) - 4(1 - \nu_s) k I_n(kR) \right) A_s + k I_n(kR) B_s + \left( -k^2 r K_n' - \right. \\
&\quad \left. - 4(1 - \nu_s) k K_n(kR) \right) \tilde{A}_s + k K_n(kR) \tilde{B}_s = A \\
&-\frac{n}{r} I_n(kR) B_s - k I_n'(kR) C_s - \frac{n}{r} K_n(kR) \tilde{B}_s - k K_n'(kR) \tilde{C}_s = B \\
&-k^2 R I_n(kR) A_s - k^2 R K_n(kR) \tilde{A}_s + k I_n'(kR) B_s + k K_n'(kR) \tilde{B}_s + \\
&+\frac{n}{R} I_n(kR) C_s + \frac{n}{R} K_n(kR) \tilde{C}_s = C, \tag{10} \\
&\left( k I_n(ka) + k a I_n''(ka) + (5 - 4\nu_s) I_n'(ka) \right) k^2 A_s - 2k^2 a^2 I_n'(ka) B_s - \\
&-nka I_n(ka) C_s + \left( k K_n(ka) + k a K_n''(ka) + (5 - 4\nu_s) K_n'(ka) \right) k^2 \tilde{A}_s - \\
&-2k^2 a^2 K_n'(ka) \tilde{B}_s - nka K_n(ka) \tilde{C}_s = 0. \\
&-a^2 n k^2 I_n(ka) A_s + 2n \left( k a I_n'(ka) - I_n(ka) \right) B_s + \left( k^2 a^2 I_n''(ka) - \right. \\
&\quad \left. - k a I_n'(ka) + n^2 I_n(ka) \right) C_s - a^2 n k^2 K_n(ka) \tilde{A}_s + \\
&+ 2n \left( k a K_n'(ka) - K_n(ka) \right) \tilde{B}_s + \\
&+ \left( k^2 a^2 K_n''(ka) - k a K_n'(ka) + n^2 K_n(ka) \right) \tilde{C}_s = 0 \\
&\left( 2(1 - 2\nu_s) I_n(ka) + 2k a I_n'(ka) \right) k^2 a^2 A_s - 2k^2 a^2 I_n''(ka) B_s + \\
&+ 2n \left( I_n(ka) - k a I_n'(ka) \right) C_s + \left( 2(1 - 2\nu_s) K_n(ka) + 2k a K_n'(ka) \right) k^2 a^2 \tilde{A}_s - \\
&-2k^2 a^2 K_n''(ka) \tilde{B}_s + 2n \left( K_n(ka) - k a K_n'(ka) \right) \tilde{C}_s = 0
\end{aligned}$$

С помощью этой системы постоянные  $A_s, B_s, C_s, \tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s$  выразим через  $A, B, C$ :

$$\begin{aligned} A_s &= \Delta^{-1}(\Delta_1^{(1)}A + \Delta_1^{(2)}B + \Delta_1^{(3)}C); & B_s &= \Delta^{-1}(\Delta_2^{(1)}A + \Delta_2^{(2)}B + \Delta_2^{(3)}C); \\ C_s &= \Delta^{-1}(\Delta_3^{(1)}A + \Delta_3^{(2)}B + \Delta_3^{(3)}C); & \tilde{A}_s &= \Delta^{-1}(\Delta_4^{(1)}A + \Delta_4^{(2)}B + \Delta_4^{(3)}C); \\ \tilde{B}_s &= \Delta^{-1}(\Delta_5^{(1)}A + \Delta_5^{(2)}B + \Delta_5^{(3)}C); & \tilde{C}_s &= \Delta^{-1}(\Delta_6^{(1)}A + \Delta_6^{(2)}B + \Delta_6^{(3)}C). \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\Delta$ - главный, а  $\Delta_i^{(j)}$ -вспомогательные определители системы (10).

Используя (7), (8) и (11) для компоненты вектора напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[ \left( q_{11}\Delta_1^{(1)} + q_{12}\Delta_2^{(1)} + q_{13}\Delta_3^{(1)} + q_{14}\Delta_4^{(1)} + q_{15}\Delta_5^{(1)} + q_{16}\Delta_6^{(1)} \right) \cdot A \right. \\ &+ \left( q_{11}\Delta_1^{(2)} + q_{12}\Delta_2^{(2)} + q_{13}\Delta_3^{(2)} + q_{14}\Delta_4^{(2)} + q_{15}\Delta_5^{(2)} + q_{16}\Delta_6^{(2)} \right) \cdot B + \\ &+ \left. \left( q_{11}\Delta_1^{(3)} + q_{12}\Delta_2^{(3)} + q_{13}\Delta_3^{(3)} + q_{14}\Delta_4^{(3)} + q_{15}\Delta_5^{(3)} + q_{16}\Delta_6^{(3)} \right) \cdot C \right] \cos n\varphi \cos kx \\ \sigma_{r\varphi} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[ \left( p_{11}\Delta_1^{(1)} + p_{12}\Delta_2^{(1)} + p_{13}\Delta_3^{(1)} + p_{14}\Delta_4^{(1)} + p_{15}\Delta_5^{(1)} + p_{16}\Delta_6^{(1)} \right) \cdot A \right. \\ &+ \left( p_{11}\Delta_1^{(2)} + p_{12}\Delta_2^{(2)} + p_{13}\Delta_3^{(2)} + p_{14}\Delta_4^{(2)} + p_{15}\Delta_5^{(2)} + p_{16}\Delta_6^{(2)} \right) \cdot B + \\ &+ \left. \left( p_{11}\Delta_1^{(3)} + p_{12}\Delta_2^{(3)} + p_{13}\Delta_3^{(3)} + p_{14}\Delta_4^{(3)} + p_{15}\Delta_5^{(3)} + p_{16}\Delta_6^{(3)} \right) \cdot C \right] \sin n\varphi \sin kx \\ \sigma_{rr} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[ \left( r_{11}\Delta_1^{(1)} + r_{12}\Delta_2^{(1)} + r_{13}\Delta_3^{(1)} + r_{14}\Delta_4^{(1)} + r_{15}\Delta_5^{(1)} + r_{16}\Delta_6^{(1)} \right) \cdot A \right. \\ &+ \left( r_{11}\Delta_1^{(2)} + r_{12}\Delta_2^{(2)} + r_{13}\Delta_3^{(2)} + r_{14}\Delta_4^{(2)} + r_{15}\Delta_5^{(2)} + r_{16}\Delta_6^{(2)} \right) \cdot B + \\ &+ \left. \left( r_{11}\Delta_1^{(3)} + r_{12}\Delta_2^{(3)} + r_{13}\Delta_3^{(3)} + r_{14}\Delta_4^{(3)} + r_{15}\Delta_5^{(3)} + r_{16}\Delta_6^{(3)} \right) \cdot C \right] \cos n\varphi \sin kx \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_{11} &= \left( k^* I_n(k^*) + k^* I_n''(k^*) + (5 - 4\nu_s) I_n'(k^*) \right) k^{*2}; & q_{12} &= -2k^{*2} I_n'(k^*); \\ q_{13} &= -nk^* I_n(k^*); & q_{14} &= \left( k^* K_n(k^*) + k^* K_n''(k^*) + (5 - 4\nu_s) K_n'(k^*) \right) k^{*2}; \\ q_{15} &= -2k^{*2} K_n'(k^*); & q_{16} &= -nk^* K_n(k^*); \\ p_{11} &= -nk^{*2} I_n(k^*); & p_{12} &= 2n \left( k^* I_n'(k^*) - I_n(k^*) \right); \\ p_{13} &= k^{*2} I_n''(k^*) - k^* I_n'(k^*) + n^2 I_n(k^*); & p_{14} &= -nk^{*2} K_n(k^*); \\ p_{15} &= 2n \left( k^* K_n'(k^*) - K_n(k^*) \right); & p_{16} &= k^{*2} K_n''(k^*) - k^* K_n'(k^*) + n^2 K_n(k^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{11} &= (2(1-2\nu_s)I_n(\mathbf{k}^\bullet) + 2\mathbf{k}^\bullet I_n'(\mathbf{k}^\bullet))\mathbf{k}^{\bullet 2}; & r_{12} &= -2\mathbf{k}^{\bullet 2} I_n''(\mathbf{k}^\bullet); \\
r_{13} &= 2n(I_n(\mathbf{k}^\bullet) - \mathbf{k}^\bullet I_n'(\mathbf{k}^\bullet)); & r_{14} &= (2(1-2\nu_s)K_n(\mathbf{k}^\bullet) + 2\mathbf{k}^\bullet K_n'(\mathbf{k}^\bullet))\mathbf{k}^{\bullet 2}; \\
r_{15} &= -2\mathbf{k}^{\bullet 2} K_n''(\mathbf{k}^\bullet); & r_{16} &= 2n(I_n(\mathbf{k}^\bullet) - \mathbf{k}^\bullet I_n'(\mathbf{k}^\bullet)).
\end{aligned}$$

В результате для  $q_x, q_\theta, q_r$  находим:

$$\begin{aligned}
q_x &= (C_{x1}A + C_{x2}B + C_{x3}C)\cos n\varphi \sin kx, \\
q_\varphi &= (C_{\varphi 1}A + C_{\varphi 2}B + C_{\varphi 3}C)\sin n\varphi \sin kx, \\
q_r &= (C_{r1}A + C_{r2}B + C_{r3}C)\cos n\varphi \sin kx,
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{x1} &= -\mu_s \Delta^{-1} (q_{11}\Delta_1^{(1)} + q_{12}\Delta_2^{(1)} + q_{13}\Delta_3^{(1)} + q_{14}\Delta_4^{(1)} + q_{15}\Delta_5^{(1)} + q_{16}\Delta_6^{(1)}); \\
C_{x2} &= -\mu_s \Delta^{-1} (q_{11}\Delta_1^{(2)} + q_{12}\Delta_2^{(2)} + q_{13}\Delta_3^{(2)} + q_{14}\Delta_4^{(2)} + q_{15}\Delta_5^{(2)} + q_{16}\Delta_6^{(2)}); \\
C_{x3} &= -\mu_s \Delta^{-1} (q_{11}\Delta_1^{(3)} + q_{12}\Delta_2^{(3)} + q_{13}\Delta_3^{(3)} + q_{14}\Delta_4^{(3)} + q_{15}\Delta_5^{(3)} + q_{16}\Delta_6^{(3)}); \\
C_{\varphi 1} &= -\mu_s \Delta^{-1} [(p_{11}\Delta_1^{(1)} + p_{12}\Delta_2^{(1)} + p_{13}\Delta_3^{(1)} + p_{14}\Delta_4^{(1)} + p_{15}\Delta_5^{(1)} + p_{16}\Delta_6^{(1)})]; \\
C_{\varphi 2} &= -\mu_s \Delta^{-1} (p_{11}\Delta_1^{(2)} + p_{12}\Delta_2^{(2)} + p_{13}\Delta_3^{(2)} + p_{14}\Delta_4^{(2)} + p_{15}\Delta_5^{(2)} + p_{16}\Delta_6^{(2)}); \\
C_{\varphi 3} &= -\mu_s \Delta^{-1} (p_{11}\Delta_1^{(3)} + p_{12}\Delta_2^{(3)} + p_{13}\Delta_3^{(3)} + p_{14}\Delta_4^{(3)} + p_{15}\Delta_5^{(3)} + p_{16}\Delta_6^{(3)}); \\
C_{r1} &= -\mu_s \Delta^{-1} (r_{11}\Delta_1^{(1)} + r_{12}\Delta_2^{(1)} + r_{13}\Delta_3^{(1)} + r_{14}\Delta_4^{(1)} + r_{15}\Delta_5^{(1)} + r_{16}\Delta_6^{(1)}); \\
C_{r2} &= -\mu_s \Delta^{-1} (r_{11}\Delta_1^{(2)} + r_{12}\Delta_2^{(2)} + r_{13}\Delta_3^{(2)} + r_{14}\Delta_4^{(2)} + r_{15}\Delta_5^{(2)} + r_{16}\Delta_6^{(2)}); \\
C_{r3} &= -\mu_s \Delta^{-1} (r_{11}\Delta_1^{(3)} + r_{12}\Delta_2^{(3)} + r_{13}\Delta_3^{(3)} + r_{14}\Delta_4^{(3)} + r_{15}\Delta_5^{(3)} + r_{16}\Delta_6^{(3)}).
\end{aligned}$$

После подстановки (12) в (2) и интегрирования по  $\xi$  и  $\theta$  получим формулу для работы внешних поверхностных нагрузок, приложенных к оболочке

$$\begin{aligned}
A_0 &= -R^2 \pi [S_2 C_{x1} A^2 + (S_2 C_{x2} + S_1 C_{\varphi 1}) AB + (S_2 C_{x3} + S_1 C_{r1}) AC \\
&+ S_1 (C_{\varphi 3} + C_{r2}) BC + S_1 C_{\varphi 2} B^2 + S_1 C_{r3} C^2]
\end{aligned} \tag{14}$$

где  $S_1, S_2$  - постоянные.

Используя (1), (7), (14) для полной энергии системы получим полином второго порядка относительно параметров постоянных  $A, B, C$ :

$$\Pi = \psi_{11} A^2 + \psi_{22} B^2 + (\psi_{33} - p_{nc}) C^2 + \psi_{44} AB + \psi_{55} AC + \psi_{66} BC.$$

Отметим, что формулу для величины  $\psi_{ii}$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) имеют громоздкий вид,

поэтому их здесь не приводим.

Условия экстремума  $\Pi$  по параметрам  $A, B, C$  сводят решение задачи об устойчивости подкрепленных оболочек, заполненных средой к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка, нетривиальные решения которого возможны лишь в случае, если определитель этой системы равен нулю:

$$\det \|c_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

или в раскрытом виде

$$\begin{cases} 2\psi_{11}A + \psi_{44}B + \psi_{55}C = 0 \\ \psi_{44}A + 2\psi_{22}B + \psi_{66}C = 0 \\ \psi_{55}A + \psi_{66}B + 2(\psi_{33} - p_{hc})C = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Из условия равенства нулю определителя системы (16), получим формулу для вычисления параметра критических напряжений, которую можно записать в виде:

$$p_{hc} = \frac{\psi_{11}\psi_{66}^2 + \psi_{22}\psi_{55}^2 + \psi_{33}\psi_{44}^2 - \psi_{44}\psi_{55}\psi_{66} - \psi_{11}\psi_{22}\psi_{33}}{\psi_{33}\psi_{44}^2 - 4\psi_{11}\psi_{22}\psi_{33}}. \quad (17)$$

Из (16) видно, что  $p_h$  имеет точки разрыва. Положения точек разрыва определяется из уравнения

$$\psi_{33}\psi_{44}^2 - 4\psi_{11}\psi_{22}\psi_{33} = 0.$$

Зная точки разрыва  $p_{hcr}$ , всегда можно определить границы области, в которой лежит искомый минимальный корень уравнения (15). Определив их для заданных параметров, выбрав из них  $(p_{hcr})_{\min}$ , находим  $p_{hc,kr}$ . Приведем результаты исследования влияния числа ребер и жесткости сред на критическое напряжение осевого сжатия. Вычисления выполнены для оболочки, среды и ребер с такими параметрами:

$$E = E_c = E_n = 6,67 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; \nu = 0,3; \chi = 1; n = 8; h_n = 1,39 \text{ мм}; R = 160 \text{ мм};$$

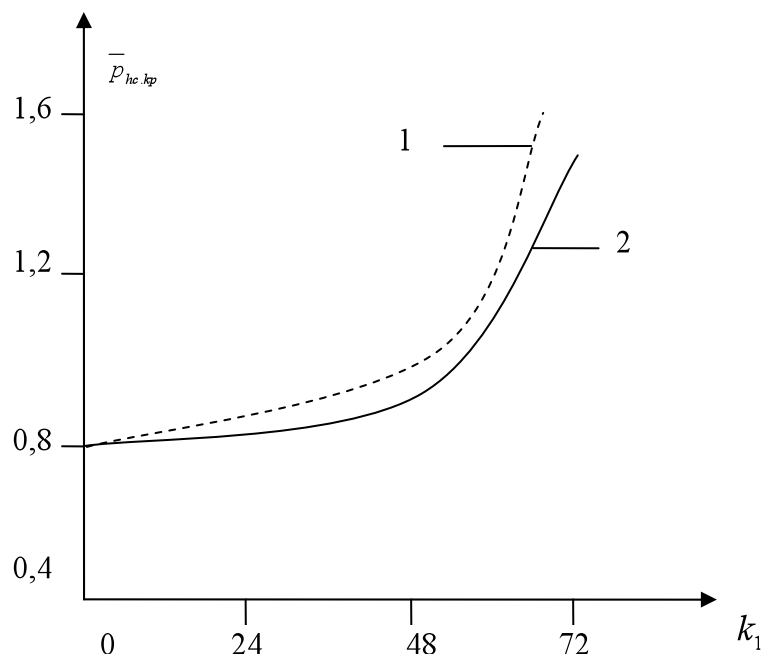
$$L_1 = 800 \text{ мм}; \frac{F_c}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}; \frac{I_{yc}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}; h = 0,45 \text{ мм};$$

$$F_s = 5,75 \text{ мм}^2; I_{sh} = 19,9 \text{ мм}^4; |h_c| = 0,1375 \cdot 10^{-1} R; \frac{I_{kr,c}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6};$$

$$I_{kr,h} = 0,48 \text{ мм}^4; k_1 = k = 4.$$

На рис.1 представлены зависимость значения  $\bar{p}_{hc,kr} = \frac{p_{hc,kr}}{p_0}$  ( $p_0$  - параметр критических напряжений для неподкрепленной оболочки), вычисленных на основе формулы (16) от количества поперечных ребер  $k_1$ . Из рисунка видно, что наличие среды приводит к увеличению критического напряжения. Немонотонное

увеличение  $\bar{p}_{hc.kp}$  с ростом  $k_1$  объясняется тем, что при малых значениях  $k_1$  влияние ребер на  $\bar{p}_{hc.kp}$  незначительно, а при больших  $k$  увеличивается сопротивление панелей изгибу ребер в касательной плоскости, в связи с чем влияние  $I_{yc}$  на  $\bar{p}_{c.kp}$  уменьшается.



**Рис.1.** Зависимость  $\bar{p}_{hc.kp}$  от количества поперечных ребер  $k_1$ :  
1- со средой; 2- без среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. «Наукова думка», 1980, 367с.
2. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М., Наука, 1977, 331 с.
3. Исаев З.Ф. Устойчивость цилиндрических оболочек, усиленных продольными ребрами и заполненной средой при осевом сжатии. Механика. Машиностроение. Баку, 2006, №2, стр. 21–23
4. Латифов Ф.С., Гасанов Ш.А. Устойчивость цилиндрических оболочек, усиленных поперечными ребрами и заполненной средой при статическом внешнем давлении. Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of physical-technical and mathematical sciences. XI, №4, 2005, п.
5. Гасанов Ш.А. Устойчивость цилиндрических оболочек, усиленных продольными ребрами и заполненных средой при статическом внешнем давлении. Механика-машиностроение, № 1, 2005, с. 5-7. Ф.С.Латифов.

6. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку, Элм», 1999, 164с.

**OXU BOYU SIXILAN İÇƏRİSİNDƏ DAXİLİ KANALA MALİK MÜHİT  
OLAN MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ SLİNDRİK ÖRTÜYÜN DAYANIQLIĞI**

**Z.F.İSAYEV**

**XÜLASƏ**

Məqalədə oxu boyu sıxılan içərisində daxili kanala malik mühit olan ortoqonal şəbəkə əmələ gətirən çubuqlarla möhkəmləndirilmiş slindrik örtüyün dayanıqlığı tədqiq olunmuşdur. Məsələ energetik üsulla həll edilmişdir. Çubuqların müntəzəm yerləşdiyi qəbul edilərək ədədi üsulla böhran gərginliyi tapılmış, mühit üçölçülü xətti elastiki cisim kimi modelləşdirilmiş, ətraf mühit parametrlərinin böhran gərginliyinə təsiri tədqiq edilmişdir.

**STABILITY OF MEDIUM-FILLED CYLINDRICAL SHELLS REINFORCED  
BY TRANSVERSE RIBS UNDER LONGITUDINAL AXIAL COMPRESSION  
WITH REGARD TO DISCRETE ALLOCATION OF RIBS**

**Z.F.ISAYEV**

**SUMMARY**

The paper is devoted to the investigation of stability of elastic medium-filled cylindrical shells reinforced by transverse ribs under axial compression. Influence of external medium parameters on critical shell parameter is analyzed. The value of critical stress is simulated by the numerical method. The medium is simulated as a linear elastic body. Rigid contact between medium and shell is considered. The problem is solved by the variation principle.